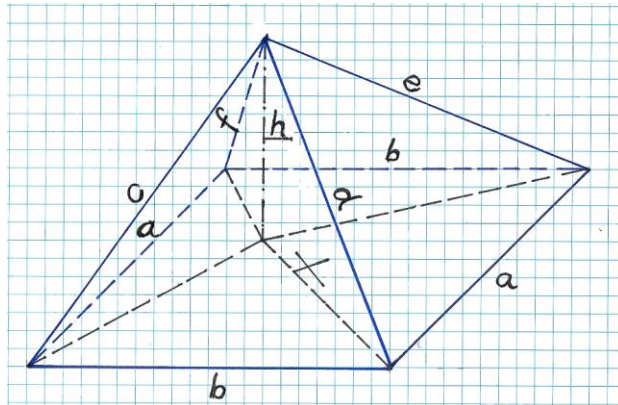


Téglalap alapú aszimmetrikus gúla adatainak meghatározása

Az említett gúla axonometrikus képe az alábbi – 1. ábra.



1. ábra

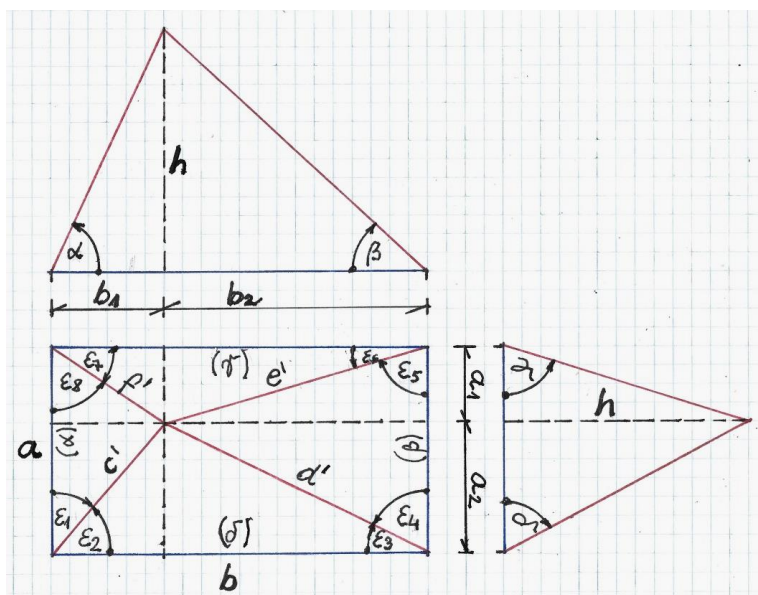
A feladat

Határozzuk meg a 1. ábrán szereplő gúla esetében:

- ~ a gúlaélek vetületeinek jellemző szögeit;
- ~ a gúlaélek valódi hosszát;
- ~ a gúla palástfelszínét;
- ~ a gúla térfogatát!

A megoldás

A számításokat alább részletezzük. Ehhez tekintsük a 2. ábrát!



2. ábra

Először megállapítjuk az (a_1, a_2) és a (b_1, b_2) szakaszok hosszát.

$$a_1 = \frac{h}{\operatorname{tg} \gamma}, \quad a_2 = \frac{h}{\operatorname{tg} \delta}; \quad (1)$$

$$b_1 = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad b_2 = \frac{h}{\operatorname{tg} \beta}. \quad (2)$$

Másodszor meghatározzuk az élek alaprajzi jellemző szögeit, tangens szögfüggvénnyel.

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{b_1}{a_2} = \frac{\frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}}{\frac{h}{\operatorname{tg} \delta}} = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \alpha} \rightarrow \varepsilon_1 = \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \alpha} \right); \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{a_2}{b_1} = \frac{\frac{h}{\operatorname{tg} \delta}}{\frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \delta}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \delta} \rightarrow \varepsilon_2 = \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \delta} \right); \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_3 = \frac{a_2}{b_2} = \frac{\frac{h}{\operatorname{tg} \delta}}{\frac{h}{\operatorname{tg} \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \delta}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_3 = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \delta} \rightarrow \varepsilon_3 = \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \delta} \right); \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_4 = \frac{b_2}{a_2} = \frac{\frac{h}{\operatorname{tg} \beta}}{\frac{h}{\operatorname{tg} \delta}} = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \beta}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_4 = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \beta} \rightarrow \varepsilon_4 = \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \beta} \right); \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_5 = \frac{b_2}{a_1} = \frac{\frac{h}{\operatorname{tg} \beta}}{\frac{h}{\operatorname{tg} \gamma}} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_5 = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta} \rightarrow \varepsilon_5 = \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta} \right); \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_6 = \frac{a_1}{b_2} = \frac{\frac{h}{\operatorname{tg} \gamma}}{\frac{h}{\operatorname{tg} \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_6 = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma} \rightarrow \varepsilon_6 = \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma} \right); \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_7 = \frac{a_1}{b_1} = \frac{\frac{h}{\operatorname{tg} \gamma}}{\frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \gamma}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_7 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \gamma} \rightarrow \varepsilon_7 = \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \gamma} \right); \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_8 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{\frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}}{\frac{h}{\operatorname{tg} \gamma}} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon_8 = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha} \rightarrow \varepsilon_8 = \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha} \right). \quad (10)$$

Harmadszor meghatározzuk a gúlaélek valódi hosszát, térbeli **Pitagorász** - tétellel.

$$c^2 = a_2^2 + b_1^2 + h^2 = \left(\frac{h}{\operatorname{tg} \delta} \right)^2 + \left(\frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 + h^2 = h^2 \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \delta} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + 1 \right),$$

$$\underline{\underline{c = h \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \delta}}}}; \quad (11)$$

$$d^2 = a_2^2 + b_2^2 + h^2 = \left(\frac{h}{\operatorname{tg} \delta} \right)^2 + \left(\frac{h}{\operatorname{tg} \beta} \right)^2 + h^2 = h^2 \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \delta} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta} + 1 \right),$$

$$\underline{\underline{d = h \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \delta}} ;}} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} e^2 &= a_1^2 + b_2^2 + h^2 = \left(\frac{h}{\operatorname{tg} \gamma}\right)^2 + \left(\frac{h}{\operatorname{tg} \beta}\right)^2 + h^2 = h^2 \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \gamma} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta} + 1\right), \\ \underline{\underline{e &= h \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \gamma}} ;}} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} f^2 &= a_1^2 + b_1^2 + h^2 = \left(\frac{h}{\operatorname{tg} \gamma}\right)^2 + \left(\frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 + h^2 = h^2 \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \gamma} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + 1\right), \\ \underline{\underline{f &= h \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \gamma}} .}} \end{aligned} \quad (14)$$

Negyedszerre meghatározzuk a gúla palástfelszínét.

$$\begin{aligned} A_{\text{palást}} &= \frac{a \cdot b_1}{2 \cdot \cos \alpha} + \frac{b \cdot a_2}{2 \cdot \cos \delta} + \frac{a \cdot b_2}{2 \cdot \cos \beta} + \frac{b \cdot a_1}{2 \cdot \cos \gamma} = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{b_1}{\cos \alpha} + \frac{b_2}{\cos \beta}\right) + \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{a_2}{\cos \delta} + \frac{a_1}{\cos \gamma}\right) = \\ &= \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{\frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}}{\cos \alpha} + \frac{\frac{h}{\operatorname{tg} \beta}}{\cos \beta}\right) + \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{\frac{h}{\operatorname{tg} \delta}}{\cos \delta} + \frac{\frac{h}{\operatorname{tg} \gamma}}{\cos \gamma}\right) = \\ &= \frac{a}{2} \cdot h \cdot \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta}\right) + \frac{b}{2} \cdot h \cdot \left(\frac{1}{\sin \delta} + \frac{1}{\sin \gamma}\right) = \\ &= \frac{h}{2} \cdot \left[a \cdot \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta}\right) + b \cdot \left(\frac{1}{\sin \delta} + \frac{1}{\sin \gamma}\right)\right], \text{ tehát:} \\ \underline{\underline{A_{\text{palást}} &= \frac{h}{2} \cdot \left[a \cdot \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta}\right) + b \cdot \left(\frac{1}{\sin \delta} + \frac{1}{\sin \gamma}\right)\right] .}} \end{aligned} \quad (15)$$

Ötödszörre meghatározzuk a gúla térfogatát.

$$\underline{\underline{V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h .}} \quad (16)$$

Ezzel kitűzött feladatainkat megoldottuk.

Megjegyzések:

M1. Az élvetületek jellemző szögeinek meghatározásnál alkalmazhattuk volna az alábbi, a korábbiakból ismert formulákat is:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \delta}} = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \delta}} = \frac{1}{0 + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \delta}} = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \alpha} ,$$

tehát:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \alpha} ; \quad (3^*)$$

majd:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_2 = \operatorname{tg}(90^\circ - \varepsilon_1) = \operatorname{ctg} \varepsilon_1 = \frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \delta} ,$$

tehát:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \delta} , \quad (4^*)$$

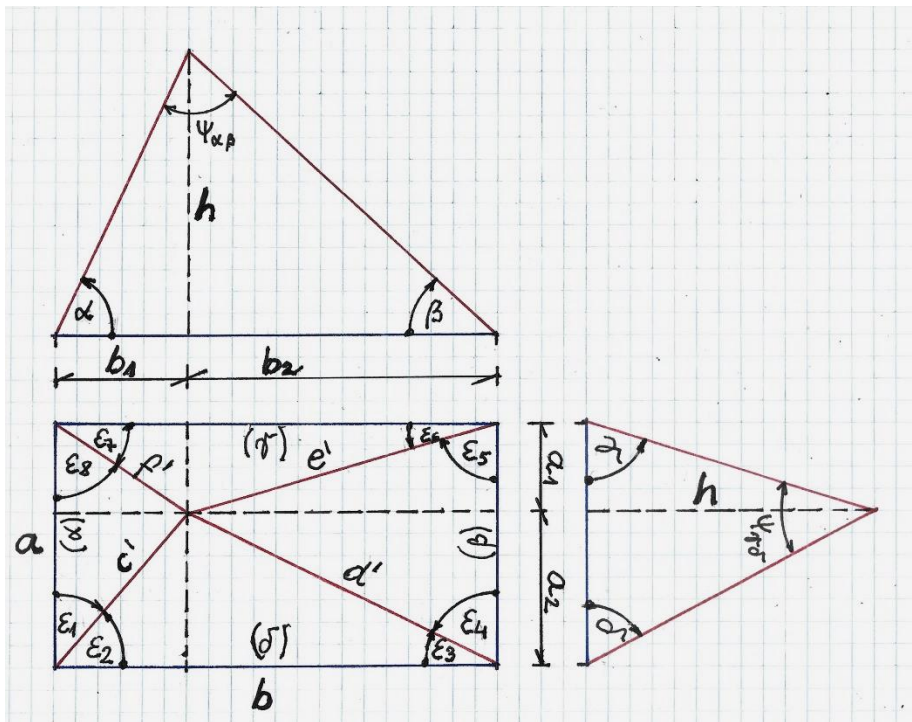
egyezésben az itteni eredményekkel.

M2. Igyekeztünk a lehető legegyszerűbb alakú képleteket megkeresni. Sokkal bonyolultabbak a képletek, ha h nem adott, hanem (a, γ, δ) , illetve (b, α, β) - val van kifejezve. Ugyanis rövid számítással adódik, hogy:

$$h = a \cdot \frac{\operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \delta} = b \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} . \quad (17)$$

M3. A közismertnek tekintett összefüggésekre nézve ld.: [1]!

M4. Kiegészítő feladatként határozzuk meg a lapszögeket is! Ehhez tekintsük a 3. ábrát!



3. ábra

Itt a $\psi_{\alpha\beta}$ és a $\psi_{\gamma\delta}$ könnyen ábrázolható lapszögeket mutattuk meg.

Az általános összefüggés képlete *) szerint a következő.

Az ε szöget bezáró ereszekből induló, a φ_1 és φ_2 hajlású tetősíkok által bezárt ψ lapszögre fennáll, hogy:

$$\cos \psi = -\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \varepsilon ; \quad (18)$$

itt az ereszsarok szögére:

$$\varepsilon = 90^\circ , \quad (19)$$

így (18) és (19) - cel:

$$\cos \psi = -\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 . \quad (20)$$

A tetősíkok és az ereszsík lapszögei maguk a tetőhajlások.

Az α és δ hajlású tetősíkok lapszöge:

$$\cos \psi_{\alpha\delta} = -\cos \alpha \cdot \cos \delta \rightarrow \underline{\underline{\psi_{\alpha\delta} = \arccos(-\cos \alpha \cdot \cos \delta)}} . \quad (21)$$

A δ és β hajlású tetősíkok lapszöge:

$$\cos \psi_{\delta\beta} = -\cos \delta \cdot \cos \beta \rightarrow \underline{\underline{\psi_{\delta\beta} = \arccos(-\cos \delta \cdot \cos \beta)}} . \quad (22)$$

A β és γ hajlású tetősíkok lapszöge:

$$\cos \psi_{\beta\gamma} = -\cos \beta \cdot \cos \gamma \rightarrow \underline{\underline{\psi_{\beta\gamma} = \arccos(-\cos \beta \cdot \cos \gamma)}} . \quad (23)$$

A γ és α hajlású tetősíkok lapszöge:

$$\cos \psi_{\gamma\alpha} = -\cos \gamma \cdot \cos \alpha \rightarrow \underline{\underline{\psi_{\gamma\alpha} = \arccos(-\cos \gamma \cdot \cos \alpha)}} . \quad (24)$$

A α és β hajlású tetősíkok lapszöge:

$$\underline{\underline{\psi_{\alpha\beta} = 180^\circ - (\alpha + \beta)}} . \quad (25)$$

A γ és δ hajlású tetősíkok lapszöge:

$$\underline{\underline{\psi_{\gamma\delta} = 180^\circ - (\gamma + \delta)}} . \quad (26)$$

Ezzel a kiegészítő feladatot is megoldottuk.

Nem véletlenül gyakoroltuk itt is a lapszögek számítását. Jó lenne, ha ez ugyanolyan köz - ismert tény lenne, mint pl. a *Pitagorász* - tétel.

M5. Adja magát, hogy kiszámítsuk az élek hajlását is. Például az α és δ hajlású tetősíkok metszésvonalának hajlását $\phi_{c'c}$ - vel jelölve:

$$\operatorname{tg} \phi_{c'c} = \frac{h}{c'} = \frac{h}{\sqrt{a_2^2 + b_1^2}} = \frac{h}{\sqrt{\left(\frac{h}{\operatorname{tg} \delta}\right)^2 + \left(\frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \delta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2}} \rightarrow \phi_{c'c} = \arctg \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \delta}\right)^2} \right] .$$

(27)

A többi él hajlásának meghatározását már rábízzuk az érdeklődő Olvasóra.

Könnyű belátni, hogy:

$$\operatorname{tg} \phi_{c'c} = \sin \varepsilon_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \sin \varepsilon_2 \cdot \operatorname{tg} \delta .$$

(28)

Ajánlott olvasmány:

*) [Egy tetogeometriai alapkeplet skalaris levezetese.pdf \(galgoczi.net\)](http://galgoczi.net)

Forrás:

[1] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev:** Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Szódliget, 2024. 05. 27.

Továbbiak: www.galgoczi.net